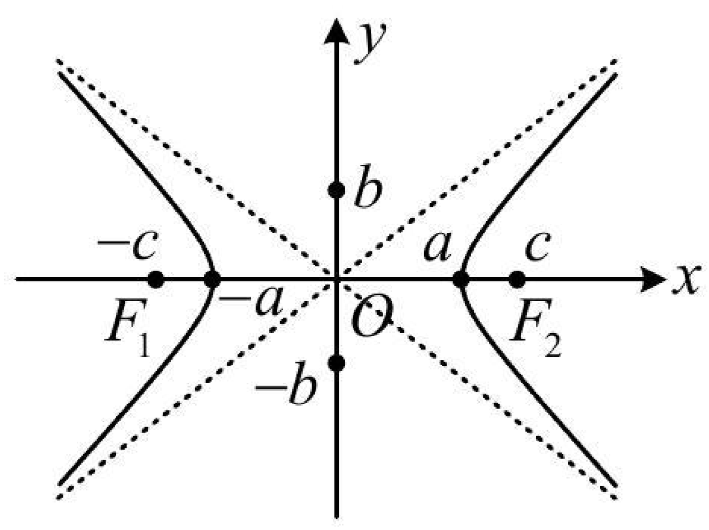
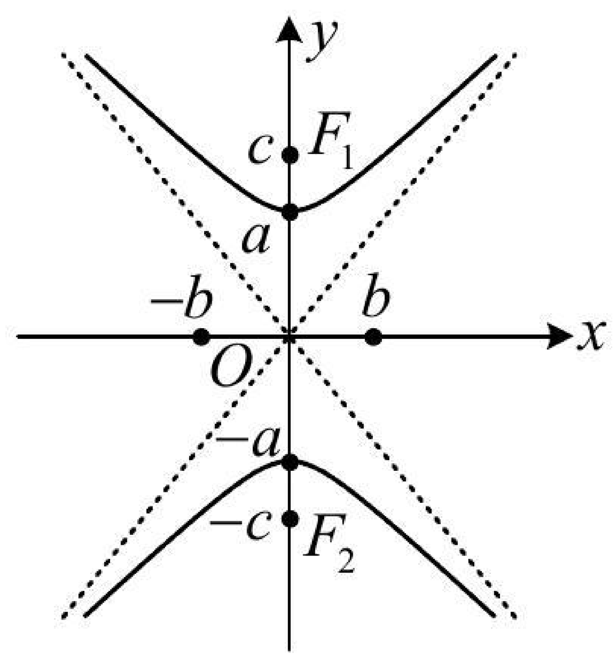
模块四 双曲线与方程

第 1 节 双曲线的定义、标准方程及简单几何性质（★★）

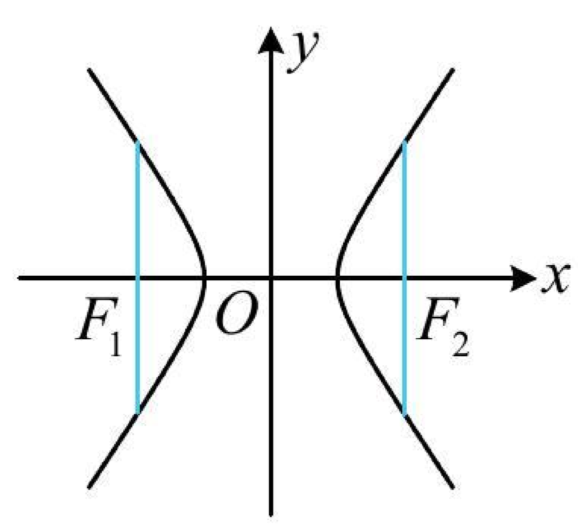
内容提要

1．双曲线定义：设 F_1，F_2 是平面内的两个定点，若平面内的点 P 满足 $||PF_1|-|PF_2||=2a(0<2a<|F_1F_2|)$，则点 P 的轨迹是以 F_1，F_2 为焦点的双曲线.

2．双曲线的标准方程及简单几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
焦点坐标	左焦点 $F_1(-c,0)$，右焦点 $F_2(c,0)$	上焦点 $F_1(0,c)$，下焦点 $F_2(0,-c)$
焦距	$\|F_1F_2\|=2c$，其中 c 叫做半焦距，且 $c^2=a^2+b^2$	
图形		
范围	$x\le -a$ 或 $x\ge a$， $y\in \mathbf{R}$	$y\le -a$ 或 $y\ge a$， $x\in \mathbf{R}$
对称性	关于 x 轴、y 轴、原点对称	
实轴端点（顶点）	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$
虚轴端点	$(0,\pm b)$	$(\pm b,0)$
实轴长	$2a$，其中 a 叫做实半轴长	
虚轴长	$2b$，其中 b 叫做虚半轴长	
渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
离心率	$e=\frac{c}{a}(e>1)$	

3．双曲线通径公式：过焦点且与双曲线实轴垂直的弦叫做通径，通径长为 $\frac{2b^2}{a}$.



典型例题

类型Ⅰ：双曲线定义的运用

【例 1】双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，且 $|PF_1|=6$，则 $|PF_2|=$_____.

解析： 已知 $|PF_1|$ 求 $|PF_2|$ 用双曲线定义，需注意有绝对值，

由题意，$||PF_1|-|PF_2||=4$，所以$|PF_1|-|PF_2|=\pm4$，故$|PF_2|=|PF_1|\pm4$，结合$|PF_1|=6$可得$|PF_2|=2$或 10.

答案：2 或 10

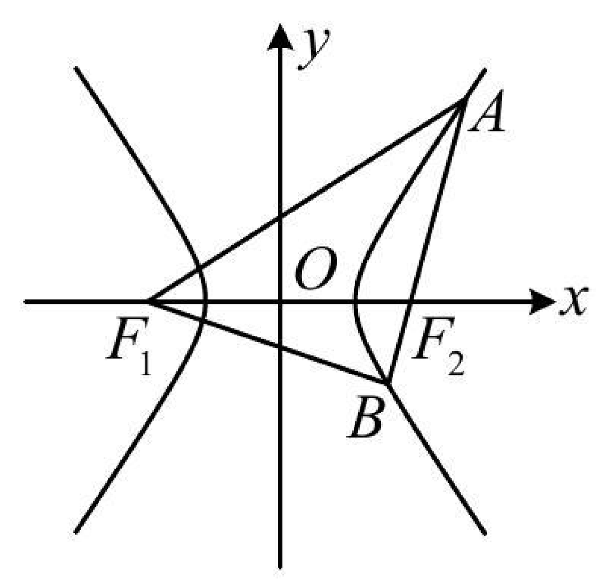
【变式 1】已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2，过F_2的直线l与双曲线C的右支交于A，B两点，若$|AB|=2$，则ΔABF_1的周长为_____.

解析：涉及双曲线上的点和左、右焦点，考虑双曲线的定义，

如图，由双曲线定义，$\begin{cases}|AF_1|-|AF_2|=4\\|BF_1|-|BF_2|=4\end{cases}$，两式相加得：$|AF_1|+|BF_1|-|AF_2|-|BF_2|=|AF_1|+|BF_1|-|AB|=8$，

结合$|AB|=2$可得$|AF_1|+|BF_1|=8+|AB|=10$，所以ΔABF_1的周长$L=|AF_1|+|BF_1|+|AB|=10+2=12$.

答案：12



【变式 2】双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$的左焦点为$F$，$A(1,2)$，$P$为双曲线右支上一点，则$|PA|+|PF|$的最小值为_____.

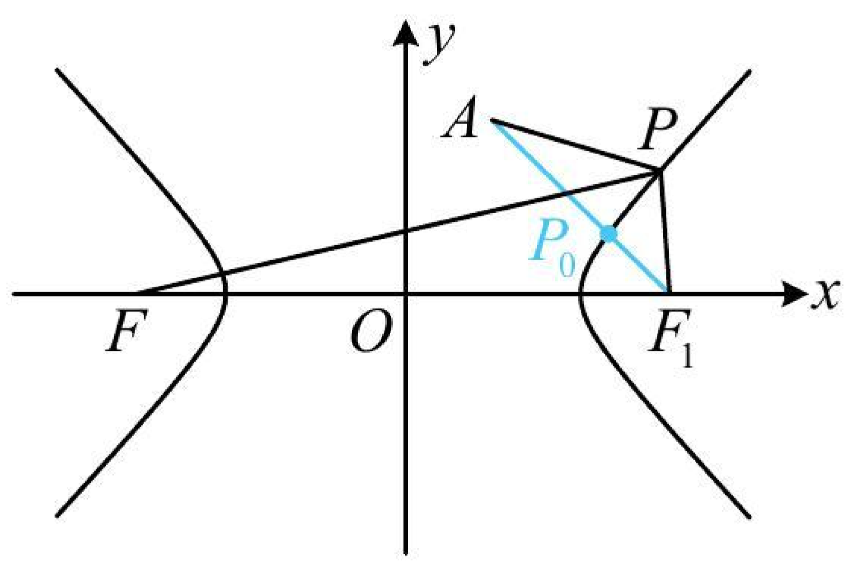
解析：如图，直接分析$|PA|+|PF|$的最小值不易，涉及$|PF|$，可考虑用定义转化到右焦点来分析，

设双曲线的右焦点为$F_1(3,0)$，则$|PF|-|PF_1|=4$，所以$|PF|=4+|PF_1|$，故$|PA|+|PF|=|PA|+|PF_1|+4$ ①，

由三角形两边之和大于第三边可得$|PA|+|PF_1|\ge|AF_1|=\sqrt{(1-3)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$，

当且仅当P与图中P_0重合时取等号，结合①可得$|PA|+|PF|\ge2\sqrt{2}+4$，故$(|PA|+|PF|)_{\min}=2\sqrt{2}+4$.

答案：$2\sqrt{2}+4$



【反思】可以发现，双曲线定义与椭圆运用思路类似，实际上大部分题目处理思路也相同，故要类比学习.

【例 2】(2020·浙江卷)已知点$O(0,0)$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，设点P满足$|PA|-|PB|=2$，且P为函数$y=3\sqrt{4-x^2}$图象上的点，则$|OP|=$（　　）

（A）$\frac{\sqrt{22}}{2}$　（B）$\frac{4\sqrt{10}}{5}$　（C）$\sqrt{7}$　（D）$\sqrt{10}$

解析：由 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$|PA|-|PB|=2$ 可得点 P 在以 A，B 为焦点的双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右支上，

要求 $|OP|$，需先求点 P，可联立方程求解，双曲线中 x 和 y 都是平方项，于是把 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 平方，

由 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 可得 $y^2=9(4-x^2)$，整理得：$x^2+\frac{y^2}{9}=4(y\ge 0)$，

设 $P(x,y)$，联立 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1\\x^2+\frac{y^2}{9}=4\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x^2=\frac{13}{4}\\y^2=\frac{27}{4}\end{cases}$，所以 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}$.

答案：D

类型Ⅱ：双曲线的标准方程及简单几何性质

【例 3】若方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{2-m}=1$ 表示双曲线，则实数 m 的取值范围为_____.

解析：双曲线标准方程中 x^2 和 y^2 的系数异号，所以 $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2-m}<0$，解得：$m<0$ 或 $m>2$.

答案：$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

【反思】对于方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$，若 $\begin{cases}m>0\\n>0\\m\ne n\end{cases}$，则该方程表示椭圆；若 $mn<0$，则该方程表示双曲线.

【例 4】双曲线 $\lambda x^2-y^2=1$ 的实轴长是虚轴长的 2 倍，则 $\lambda=$_____.

解析：先把双曲线化为标准方程，找到 a 和 b，$\lambda x^2-y^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{1}{\lambda}}-y^2=1$，

所以 $a^2=\frac{1}{\lambda}$，$b^2=1$，由题意，$2a=2\times 2b$，故 $a^2=4b^2$，即 $\frac{1}{\lambda}=4$，所以 $\lambda=\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$

【变式】某圆锥曲线 C 是椭圆或双曲线，若其中心为坐标原点，对称轴为坐标轴，且过 $A(-4,\sqrt{7})$ 和 $B(3,-\frac{\sqrt{14}}{2})$ 两点，则曲线 C 的离心率等于（　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（D）$\frac{\sqrt{6}}{2}$

解析：不确定是椭圆还是双曲线，也不知道焦点在哪个坐标轴，若讨论，得分四种情况，较为麻烦，考虑设统一形式（见反思），用待定系数法求解，

可设圆锥曲线 C 的方程为 $Ax^2+By^2=1$，因为圆锥曲线过 A，B 两点，所以 $\begin{cases}16A+7B=1\\ 9A+\frac{7}{2}B=1\end{cases}$，

解得：$A=\frac{1}{2}$，$B=-1$，所以圆锥曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

答案：D

【反思】椭圆和双曲线的方程可统一设为 $Ax^2+By^2=1$，当 A，B 为不相等的正数时，该方程表示椭圆；当 A，B 异号时，该方程表示双曲线.

【例 5】已知双曲线 $C:\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$，则 C 的右焦点的坐标为_____；点 $(4,0)$ 到其渐近线的距离是_____.

解析：由题意，$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=3$，所以双曲线 C 的右焦点的坐标为 $(3,0)$，

渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，即 $x\pm\sqrt{2}y=0$，故点 $(4,0)$ 到渐近线的距离 $d=\frac{|4|}{\sqrt{1^2+(\pm\sqrt{2})^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

答案：$(3,0)$；$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【反思】无论焦点在哪个坐标轴上，双曲线的渐近线都有个统一的求法：把标准方程中的“1”换成“0”，反解出 y 即得渐近线的方程. 例如本题将所给方程变为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=0$，可反解出渐近线 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

【变式】（2021・新高考Ⅱ卷）若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 2，则此双曲线的渐近线方程为_____.

解析：由离心率可找到 a 和 c 的比例关系，再利用 $c^2=a^2+b^2$ 换算成 a 和 b 的关系即可，

由题意，$e=\frac{c}{a}=2$，所以 $c=2a$，故 $\sqrt{a^2+b^2}=2a$，化简得：$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

答案：$y=\pm\sqrt{3}x$

【反思】离心率和渐近线斜率由 a、b、c 的比值决定，故在求它们的过程中，可对 a、b、c 按比例赋值，不会影响结果. 例如，本题也可由 $c=2a$ 直接令 $a=1$，$c=2$，于是 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}$，也得出 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$.

【例 6】双曲线 C 与双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 有相同的渐近线，且过点 $(2,2)$，则双曲线 C 的方程为_____.

解析：不知道焦点在哪个坐标轴，讨论当然可以，但较为繁琐，可用共渐近线的双曲线的统一设法，

设双曲线 $C:\frac{x^2}{2}-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$，因为双曲线 C 过点 $(2,2)$，所以 $\frac{2^2}{2}-2^2=\lambda$，解得：$\lambda=-2$，

故双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$.

答案：$\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}=1$

【反思】与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$共渐近线的双曲线可设为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$.

强化训练

1.（★）双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2，P在双曲线上，且$|PF_2|=4\sqrt{2}$，则$|PF_1|=$_____.

2.（2021·全国甲卷·★）点$(3,0)$到双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的一条渐近线的距离为（　　）

（A）$\frac{9}{5}$　（B）$\frac{8}{5}$　（C）$\frac{6}{5}$　（D）$\frac{4}{5}$

3.（2021·全国乙卷·★）已知双曲线$C:\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+my=0$，则$C$的焦距为_____.

4.（★）若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，则其渐近线方程为_____.

5.（★）若方程$\frac{x^2}{m+1}+\frac{y^2}{m-2}=1$表示焦点在$x$轴上的双曲线，则实数$m$的取值范围为_____.

6.（2023·山西朔州模拟·★★）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点为$A$，右焦点为$F$，$y$轴上一点$M(0,b)$满足$|AM|-|AF|=2b$，则该双曲线的离心率为_____.

7．（2022•云南玉溪模拟•★★）方程$\sqrt{(x+10)^2+y^2}-\sqrt{(x-10)^2+y^2}=12$化简的结果为（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1(x\ge 6)$　　（D）$\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1(x\ge 8)$

8．（★★）过双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$左焦点 F 的直线交双曲线的左支于 M，N 两点，F_2为其右焦点，则$|MF_2|+|NF_2|-|MN|$的值为_____.

9．（2023•吉林模拟•★★★）若三个点$P_1(-3,1)$，$P_2(-2,3)$，$P_3(3,-1)$中恰有两个点在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$上，则双曲线的渐近线方程为_____.

10．（2023•青海玉树模拟•★★★）已知F_1，F_2为双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$的左、右焦点，点$P$是$C$的右支上的一点，则$\dfrac{|PF_1|^2}{|PF_2|}$的最小值为（　　）

（A）16　（B）18　（C）$8+4\sqrt{2}$　（D）$9+\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

11.（2020 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★）（多选）已知曲线$C: mx^2+ny^2=1$.（　　）

（A）若$m>n>0$，则C是椭圆，其焦点在y轴上

（B）若$m=n>0$，则C是圆，其半径为$\sqrt{n}$

（C）若$mn<0$，则C是双曲线，其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

（D）若$m=0$，$n>0$，则C是两条直线

12.（★★★）双曲线$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$A(3,1)$，$P$为双曲线右支上一动点，则$|PA|-|PF_1|$的最大值为_____.